Таблица 2

Исходные данные

j	$x_{бj}$ = = M[R_j], усл. ед.	$y_{бj}$ = = P_j	a_j	b_j	x_{j2}, усл. ед.	x_{j1}, усл. ед.	y_{j2}	y_{j1}	$\bar{x}_{j2}$	$\bar{x}_{j1}$	$\bar{y}_{j2}$	$\bar{y}_{j1}$
1	1	10^{-2}	1,5	0,5	1,2	0,8	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	$0{,}8 \cdot 10^{-2}$	0,2	-0,2	0,2	-0,2
2	10	10^{-3}	0,5	1,5	12	8	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$	$0{,}8 \cdot 10^{-3}$	0,2	-0,2	0,2	-0,2
3	100	10^{-4}	0,5	0,5	120	80	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	$0{,}8 \cdot 10^{-4}$	0,2	-0,2	0,2	-0,2

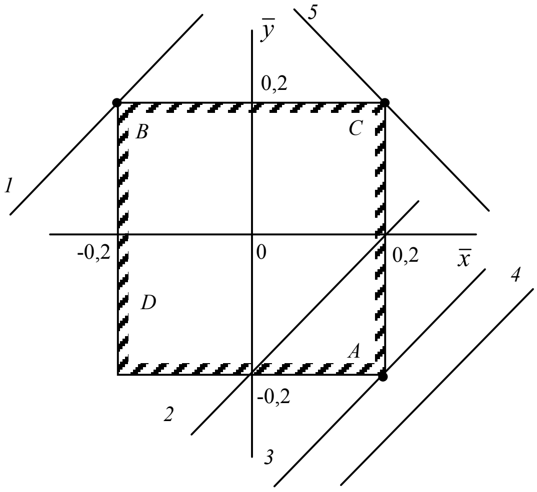

Рис. 3. Расчет оптимального ущерба:

1 – $\bar{L}(\bar{x},\bar{y})$ **= 0,5** $\bar{x}$ **– 0,5** $\bar{y}$ **= – 0,2;**

2 – $\bar{L}(\bar{x},\bar{y})$ **= – 0,5** $\bar{x}$ **+ 0,5** $\bar{y}$ **= – 0,1;**

3 – $\bar{L}(\bar{x},\bar{y})$ **= – 0,2; 4 –** $\bar{L}(\bar{x},\bar{y})$ **= – 0,25;**

5 – $\bar{L}(\bar{x},\bar{y})$ **= – 0,5** $\bar{x}$ **– 0,5** $\bar{y}$ **= – 0,2**

Для j = 3 целевая функция

$$\bar{L}(\bar{x},\bar{y}) = -\,0{,}5\ \bar{x} - 0{,}5\ \bar{y}.$$

Она имеет минимум в точке $C(\bar{x}_2,\ \bar{y}_2)$ (см. рис. 3).

Следовательно, x_0 = 120 усл. ед., $y_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$, $(\mathrm{M}[C_3])_0 = 120 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} = 144 \cdot 10^{-4}$ усл. ед.

В соответствии с (17) оптимальный средний суммарный ущерб от всех типов аварий в течение каждого года эксплуатации одной совокупности ТС:

$C_0 = 96 \cdot 10^{-4} + 96 \cdot 10^{-4} + 144 \cdot 10^{-4} = 336 \cdot 10^{-4} = 0{,}0336$ усл.ед.

Это на 12% больше, чем базовый ущерб только от аварий:

$C_б$ = 0,0300 усл. ед. (см. пример 1).

Таким образом, минимизируя общие затраты, можно пойти на некоторое ухудшение характеристик ТС. Увеличение потерь от аварий будет перекрыто экономией при производстве и эксплуатации.

Если планировать эксплуатацию 10 совокупностей подобных ТС в течение 10 лет в нынешних условиях, то суммарный средний ущерб от аварий составит:

$10 \cdot 10 \cdot 0{,}0336 = 3{,}36$ усл. ед.,

т. е. будет соответствовать 3–4 авариям первого типа.

* * *

Предлагаемая методика может послужить основой для расчета и задания оптимальных требований к характеристикам безопасности ТС. Остается решить более сложную задачу – статистического оценивания рассмотренных показателей по результатам эксплуатации, и найти методы принятия ТС с заданными оптимальными характеристиками по данным испытаниям.

Литература

1. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. – М.: Мир, 1984.
2. **Волков Л.И.** Управление эксплуатацией летательных аппаратов. 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1987.

Российская Академия наук
Статья поступила 12.11.2000

УДК 629.7.01+629.7.07

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ УЩЕРБА ОТ АВАРИЙ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2001, Л.И. Волков

Рассмотрены методы определения статистических оценок вероятности аварии и условного ущерба от аварии при различных планах испытаний. На основе положений теории статистических решений для различных функций потерь из-за ошибок оценивания найдены оптимальные решающие правила, которые соответствуют оптимальной, по критерию минимума риска, доверительной вероятности. Приведены примеры решения задач для совокупности технических систем, эксплуатируемых в течение длительных сроков.

Данная работа является непосредственным продолжением статьи «Методика расчета и оптимизации ущерба от аварий технических систем».

Суть предложенной методики расчета характеристик ущерба в технических системах (ТС) сводится к следующей модели.

В совокупности ТС могут возникать аварии конечного числа типов k (j = 1, 2, …, k). Возникновение аварии характеризуется случайным событием (исходы 0; 1) с вероятностью P_j. В результате аварии возника-

Лев Иванович Волков – член-кореспондент РАН, доктор технических наук, генерал-лейтенант в отставке

ет случайный ущерб, характеризуемый величиной R_j. Показано, что можно считать произведение математического ожидания $\mathrm{M}[R_j]$ ущерба при условии, что авария произошла, и вероятности P_j произведением математических ожиданий независимых величин, т. е. математическое ожидание безусловного ущерба от аварии j-го типа

$$\mathrm{M}[C_j] = \mathrm{M}[R_j]\cdot P_j.$$

Суммарный ущерб от всех типов аварий является суммой зависимых и коррелированных величин. Его математическое ожидание, как линейная функция $\mathrm{M}[C_j]$, принимает вид

$$\mathrm{M}[C] = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{M}[C_j] = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{M}[R_j]P_j \ . \tag{1}$$

Проблемы статистического оценивания вероятности аварии

Наибольшую сложность представляет статистическое оценивание вероятности P_j. Это связано с тем, что:

– генеральная совокупность ТС, подвергающихся испытаниям в ходе эксплуатации, обычно конечна, т. е. число ТС N в генеральной совокупности далеко не равно ∞;

– оцениваемое истинное значение P_j в процессе эксплуатации претерпевает существенные изменения из-за проводимых доработок ТС;

– в первые годы эксплуатации, когда наиболее важно получить оценки $\hat{P}_j$, изменяется численность совокупности, так как создаваемая система развивается.

По сути, имеются случайный процесс $P_j(t)$ и неслучайная функция $N(t)$. Необходимо найти по возможности несмещенные состоятельные и эффективные оценки этой функции $\hat{P}_j(t)$, а также область доверия с двухсторонней доверительной вероятностью γ или односторонней – γ_1. На этой основе выбрать оптимальное, в некотором смысле, решающее правило, определяющее такое значение $\hat{P}_{j\text{р}}$, которое можно принять за истинное P_j [1, 2].

Статистическое оценивание условного ущерба R_j, который возник после аварии j-го типа, теоретически значительно проще, т. к. его искомое математическое ожидание практически не меняется со временем. Например, после отказа ракеты в полете ущерб, конечно, случаен, зависит от места подрыва и падения остатков ступеней, пролива топлива и т. п. Однако он почти не зависит от момента аварии в процессе эксплуатации, а определяется типом аварии.

Ограниченность генеральной совокупности, ее изменение по годам $N(t)$, а также редкость событий аварии (малые объемы выборки) также накладывают отпечаток на стандартные процедуры оценивания.

Статистическое оценивание условного ущерба

На практике возможны два варианта выборки (r_1, r_2, …, r_i, …, r_n) объемом n из генеральной совокупности в N элементов: безвозвратная (все r_i зависимы, т. к. после испытания меняется истинное значение) и случай, когда все r_i независимы (т. е. $N \to \infty$, проведение опыта не меняет истинное оцениваемое значение).

Математическое ожидание и дисперсия генеральной совокупности определяются известными выражениями:

$$\left.\begin{aligned} m_{r,N} &= \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{n} r_s, \\ \sigma^2_{r,N} &= \frac{1}{N-1}\sum_{s=1}^{N}(r_s - m_{x,N})^2. \end{aligned}\right\}$$

Несмещенной асимптотически состоятельной и эффективной оценкой математического ожидания является выборочное среднее

$$\hat{m}_{r,N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} r_i, \tag{2}$$

а для дисперсии генеральной совокупности – выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2_{r,N} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \hat{m}_{r,N})^2 \ . \tag{3}$$

Дисперсия оценки математического ожидания (2)

$$\sigma^2[\hat{m}_{r,N}] = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\sigma^2_{r,N} \approx \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\hat{\sigma}^2_{r,N} \ . \tag{4}$$

При $n = N$, т. е. когда испытана вся генеральная совокупность, вместо оценки математического ожидания получим истинное значение математического ожидания, а дисперсия

$$\sigma^2[\hat{m}_{r,N}] = 0.$$

Оценка (2) является линейной функцией выборочных значений r_i, следовательно, имеет такой же, как и они, закон распределения, т. е. такой же, как генеральная совокупность [1]. Если принять закон распределения оценки $\hat{m}_{r,N}$ близким к нормальному, то двусторонний доверительный интервал оценки $\hat{m}_{r,N}$ с доверительной вероятностью γ принимает вид

$$\hat{m}_{r,N} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sigma[\hat{m}_{r,N}] \le m_{r,N} \le \hat{m}_{r,N} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sigma[\hat{m}_{r,N}], \tag{5}$$

где u_α – квантиль нормального распределения, определяемая по таблицам, полученным решением уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-t^2/2}dt = \alpha.$$

Статистическое оценивание вероятности аварии

Рассмотрим решение задачи сначала для одного j-го типа аварии. Создаваемая совокупность ТС имеет свой жизненный цикл.

Обычно в первый год эксплуатации вводят в строй головной объект (опытную партию ТС), затем в течение нескольких лет серийного производства совокупность ТС доводится до заданной численности. Одновременно с ростом совокупности изменяется неизвестный оцениваемый параметр $P_j(t)$. В первые годы эксплуатации на сложных технических системах проводится большое количество доработок, меняющих (уменьшающих) вероятность аварии. Так, в группировке однотипных ракетных комплексов за 5–8 первых лет эксплуатации выполняется до 800 доработок, большая часть которых увеличивает надежность комплекса.

Возвращаясь к нашей задаче, получим необходимость статистического оценивания случайной функции $P_j(t)$ по результатам неравноточных наблюдений крайне редких аварий. Для работы со случайной функцией потребуется знать значения ковариационных функций для каждой пары сечений, что на практике затруднительно, а, главное, будет известна одна реализация нестационарного процесса.

С достаточной для инженерных расчетов точностью будем рассматривать случайную функцию $P_j(t)$ в виде ступенчатой (рис. 1). На каждой ступеньке будем полагать P_j = const, т. е. постоянство истинного оцениваемого параметра, а также неизменность состава совокупности N (рис. 2).

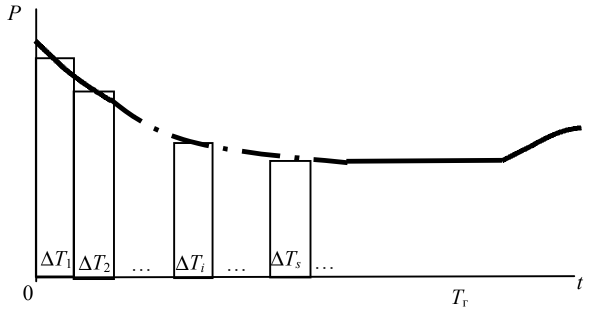

Рис. 1. Изменение вероятности аварии ТС

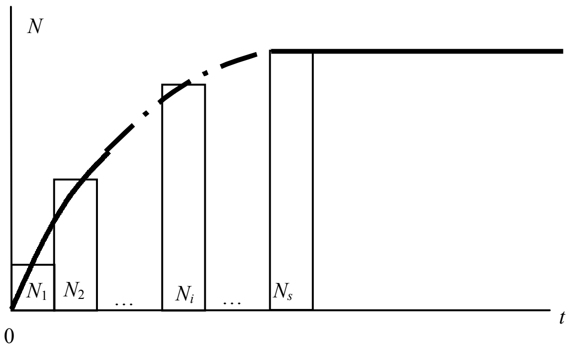

Рис. 2. Изменение численности совокупности ТС

Обычно после нескольких лет эксплуатации величина P_j стабилизируется, т.к. доработки заканчиваются, а ресурс системы достаточно большой. Уже за сроком $T_г$ гарантийного ресурса начинается увеличение вероятности аварии из-за старения системы.

Так как жизненный цикл современных больших ТС может составлять 10–20 и более лет, то интервал ΔT_i, на котором будем оценивать вероятность аварии j-го типа, может быть значительным, например 1 год. Такой интервал позволяет получить и приемлемый статистический материал.

Далее для удобства записи величину истинного значения оцениваемого параметра на выбранном интервале ΔT_i обозначим $P_j(\Delta T_i) = P$, аналогично $N_j(\Delta T_i) = N$, объем выборки – $n_j(\Delta T_i) = n$.

Для того чтобы найти несмещенные состоятельные и эффективные (хотя бы асимптотически) оценки $\hat{P}$ вероятности P, необходимо принять тот или иной статистический план испытаний, т. к. он может приводить к цензурированию выборки [2]. Для рассматриваемой задачи наиболее пригодны три плана: (n, U, T) и (n, R, T), учитывающие наработку до аварий, а также биномиальный (n, $\hat{m}$), где $\hat{m}$ – число аварий в n испытаниях.

Суть плана (n, U, T) в том, что испытывается n элементов без замены (U) до заданного времени T (рис. 3а). При плане (n, R, T) аварийный элемент мгновенно (практически за короткое время по отношению к T) заменяется или восстанавливается и продолжает работать до момента T (рис. 3б). Естественно, планы (n, U, T) и (n, R, T) более информативны, т. к. учитывают, кроме факта аварии, также наработку. Оба эти плана цензурируют выборку, т. к. обрывают ее в момент T.

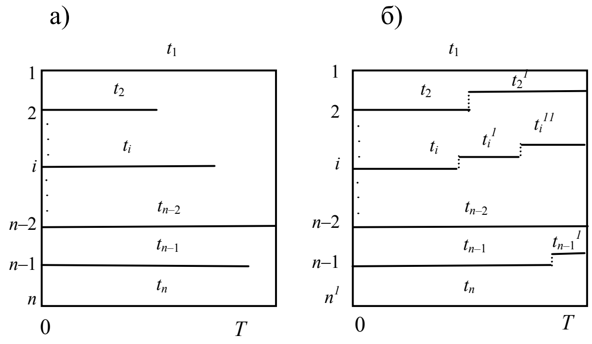

Рис. 3. Статистические планы (*n*, *U*, *T*) и (*n*, *R*, *T*)

На заданном сравнительно небольшом интервале (0, ΔT_i) поток аварий можно рассматривать как простейший. Это означает, что возникновение двух и более аварий в одно время невозможно (свойство ординарности потока), возникновение аварии на малом интервале (τ, $\tau + \Delta\tau$) не зависит от возникновения аварий на других участках (отсутствие последействия), а также количество аварий на любом интервале не зависит от положения начала интервала (стационарность). В этих условиях вероятность аварии

$$P(T) = 1 - e^{-\lambda T} \text{ при } P < 0{,}05 \qquad P(T) \approx \lambda T, \qquad (6)$$

где λ – интенсивность аварий, весьма малая для ТС.

Запишем выражение для оценок $\hat{P}$ максимального правдоподобия вероятности аварии P и ее двусторонних доверительных интервалов $\hat{P}_н$, $\hat{P}_в$ с доверительной вероятностью γ или одностороннего доверительного интервала (0, $\hat{P}_{в1}$) с доверительной вероятностью $\gamma_1 = \dfrac{1+\gamma}{2}$.

Для плана (n, $\hat{m}$) при безвозвратной выборке (бесконечной генеральной совокупности):

$$\hat{P} = \frac{\hat{m}}{n}, \qquad (7)$$

где $\hat{m}$ – выборочное значение числа аварий; n – в данном случае объем выборки.

Верхний односторонний доверительный интервал $\hat{P}_{в1}$ можно найти из уравнения

$$\sum_{j=0}^{\hat{m}} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} \hat{P}_{в1}^{\,n-j} (1-\hat{P}_{в1})^{j} \le \gamma_1. \qquad (8)$$

Для безвозвратной выборки оценка $\hat{P}$ определяется также по формуле (7), а $\hat{P}_{в1}$ с учетом гипергеометрического распределения оценки – из уравнения

$$\sum_{i=0}^{\hat{m}} C^{i}_{\hat{M}_{\text{в1}}} C^{n-i}_{N-\hat{M}_{\text{в1}}} / C^{n}_{N} \le \gamma_1, \tag{9}$$

где N, n – объемы генеральной совокупности и выборки; $\hat{M}_{\text{в1}} = \hat{P}_{\text{в1}}N$ – величина, определяемая по таблицам гипергеометрического распределения, причем $\hat{M}_{\text{в1}}$ $(N, n, \hat{m}, \gamma_1)$ [2].

Для $n \le 0{,}1N$ гипергеометрическое распределение сходится к биномиальному, поэтому вместо таблиц, составленных по (9), можно пользоваться таблицами биномиального распределения (уравнение 8).

Если величины n, $N - n$, M, $N - M$, где $M = P\cdot N$, не слишком малы, что определяется выражением

$$\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right) > 9,$$

то гипергеометрическое распределение можно аппроксимировать нормальным.

Для плана (n, R, T) с учетом (6) получим [2]

$$\hat{P} = \hat{\lambda}T, \quad \hat{\lambda} = \frac{\hat{m}}{nT}, \tag{10}$$

где $\hat{m}$ – число аварий на интервале $(0, T)$, произошедших в n элементах (ТС).

Доверительные интервалы, связанные с этой оценкой, определяются выражениями [2]:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{P}_{\text{н}} &= 1-\exp\left[-\frac{a_{\frac{1+\gamma}{2}}(\hat{m})}{n}\right];\\
\hat{P}_{\text{в}} &= 1-\exp\left[-\frac{a_{\frac{1-\gamma}{2}}(\hat{m}-1)}{n}\right];\\
\hat{P}_{\text{в1}} &= 1-\exp\left[-\frac{a_{1-\gamma_1}(\hat{m})}{n}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

При $\hat{m} = 0$

$$\hat{P}_{\text{н}} = 0;\ \hat{P}_{\text{в}} = 1-\exp\left[-\frac{a_{\frac{1-\gamma}{2}}(0)}{n}\right]; \tag{12}$$

где $a_\alpha(k) = \sum_{k=0}^{\hat{m}} \frac{a_\alpha^k}{k!}\exp(-a_\alpha) = \alpha$ – квантили распределения Пуассона.

Наконец, для плана (n, U, T) имеем [2]:

$$\hat{P} = \hat{\lambda}T, \quad \hat{\lambda} = \frac{\hat{m}}{\hat{S}(T)}, \quad \hat{S}(T) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} t_i + (n - \hat{m})T,$$

где n – объем выборки.

Доверительные интервалы для планов (n, U, T) и $(n, \hat{m})$, которые имеют биномиальное распределение, приближенно можно найти, используя распределение Пуассона. При $\hat{P} < 0{,}1$ и $n = 10$–100 такое приближение совпадает с биномиальным до третьего знака. Доверительные пределы определяют по зависимостям:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{P}_{\text{н}} &= 1-\frac{\dfrac{2n-\hat{m}-a_{\frac{1+\gamma}{2}}(\hat{m})}{2}}{2n-\hat{m}+a_{\frac{1+\gamma}{2}}(\hat{m})};\\
\hat{P}_{\text{в}} &= 1-\frac{\dfrac{2n-\hat{m}-a_{\frac{1-\gamma}{2}}(\hat{m}-1)}{2}}{2n-\hat{m}+a_{\frac{1-\gamma}{2}}(\hat{m}-1)},
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где n – объем выборки.

При $\hat{m} = 0$ для всех планов можно использовать оценку

$$\hat{P} = \frac{\hat{m}}{n} = 0,$$

с доверительными интервалами

$$\hat{P}_{\text{н}} = 0;\ \hat{P}_{\text{в}} = 1 - (1-\gamma)^{1/n}. \tag{14}$$

Оптимальная доверительная вероятность

На практике возникают проблемы с выбором величины доверительной вероятности. Чаще всего используют значения 0,90; 0,95; 0,993 (примерно $\pm 2{,}7\sigma$ нормального распределения), 0,9973 ($\pm 3\sigma$ нормального распределения). На основе теории статистических решений автором в [2] был предложен метод определения оптимальной, в некотором смысле, доверительной вероятности. Суть его сводилась к следующему.

Имеется статистическая оценка $\hat{\theta}$, по которой необходимо принять решение о величине истинного значения θ. Пусть решающее правило (правило принятия решения) представлено в виде

$$\hat{\theta}_{\text{р}} = \hat{\theta} + \Delta\theta_{\text{р}}. \tag{15}$$

Получив оценку $\hat{\theta}$, мы ее увеличиваем на величину $\Delta\theta_{\text{р}}$ и принимаем за истинное значение θ величину $\hat{\theta}_{\text{р}}$.

Если известно распределение $f_\theta(\hat{\theta})$ оценки (будем ее считать непрерывной величиной для удобства записи), то существует однозначная связь между доверительной вероятностью и решающим правилом (15):

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}+\Delta\theta_{\text{р}}} f_\theta(\hat{\theta})d\hat{\theta} = \gamma_{2\text{р}}; \quad \int_{-\infty}^{\hat{\theta}-\Delta\theta_{\text{р}}} f_\theta(\hat{\theta})d\hat{\theta} = 1 - \gamma_{1\text{р}}. \tag{16}$$

Введем случайную величину

$$y = \frac{(\hat{\theta}+\Delta\theta)-\theta}{\sigma[\hat{\theta}]}, \tag{17}$$

где $\sigma^2[\hat{\theta}]$ – дисперсия оценки $\hat{\theta}$; $\Delta\theta$ – текущее значение, а $\Delta\theta_{\text{р}}$ – оптимальное.

Определим функцию $\omega(y)$ потерь из-за неточности нахождения неизвестного истинного значения θ.

Если $y > 0$, то мы завысим величину истинного значения (например, вероятности аварии) и понесем потери (например, готовясь к более частым авариям или стремясь эту вероятность уменьшить). При $y < 0$ потери будут связаны с непланируемыми в среднем авариями, затратами на их устранение без соответствующих средств. Ясно, что функция потерь имеет две несимметричные ветви:

$$\omega(y)=\begin{cases}\omega_1(y) \text{ при } y\ge 0;\\ \omega_2(y) \text{ при } y<0;\\ 0 \qquad \text{ при } y=0;\end{cases}$$

Зная распределение $f_\theta(\hat{\theta})$ и выражение (17), представляющее линейную функцию от $\hat{\theta}$, легко найти распределение $f_y(y)$ случайной величины y.

Примем в качестве критерия оптимальности минимум математического ожидания функции потерь, т.е. минимум функции риска. По определению математического ожидания

$$\mathrm{M}[\omega(y)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(y)f_y(y)dy\ . \tag{18}$$

В выражение (18) с учетом (16) входят $\Delta\theta$ и $\gamma(\gamma_1, \gamma_2)$. Минимизируя (18) применительно к конкретному распределению оценки $f_\theta(\hat{\theta})$ и функции потерь $\omega(y)$, можно найти оптимальные по минимуму риска значения γ_p, γ_{1p}, γ_{2p}.

Для наиболее распространенного случая, когда оценка распределена нормально, а функция потерь линейна, т. е.

$$\omega(y)=\begin{cases}By \quad \text{ при } y>0;\\ -Ay \text{ при } y<0;\\ 0 \qquad \text{ при } y=0.\end{cases} \tag{19}$$

Автором в [2] получено простое аналитическое выражение для оптимальной по критерию минимума риска доверительной вероятности

$$\gamma_{1p} = \frac{\overline{A}}{1+\overline{A}}\ , \tag{20}$$

где $\overline{A}=\dfrac{A}{B}$ – масштабный коэффициент, характеризующий насколько потери из-за занижения истинного значения больше, чем из-за его завышения.

На рис. 4 приведены зависимости оптимальной доверительной вероятности от коэффициента $\overline{A}$ для экспоненциальной функции потерь (кривая 1):

$$\omega(y)=\begin{cases}B(1-e^{-y}) \text{ при } y>0;\\ A(1-e^{y}) \text{ при } y<0\ ;\\ 0 \qquad\quad \text{ при } y=0,\end{cases}$$

для линейной функции (19) – кривая 2, а также для

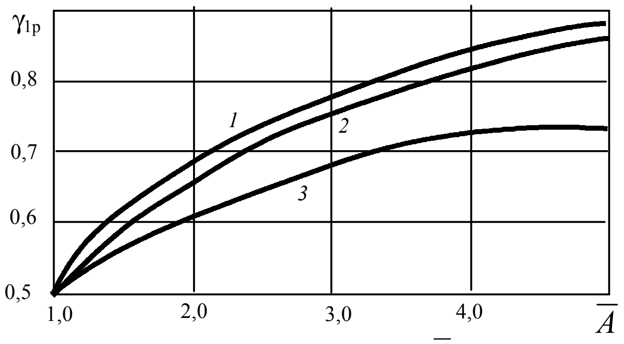

Рис. 4. Зависимость $\gamma_{1p}(\overline{A})$

квадратичной (кривая 3):

$$\omega(y)=\begin{cases}By^2 \quad \text{ при } y>0;\\ Ay^2 \quad \text{ при } y<0;\\ 0 \qquad \text{ при } y=0.\end{cases}$$

Если односторонние доверительные вероятности равны, т. е.

$\gamma_1 = \gamma_2$,

то оптимальная двусторонняя доверительная вероятность

$$\gamma_p = 2\gamma_{1p} - 1. \tag{21}$$

Статистическое оценивание суммарного ущерба от аварии

Рассмотрены методы нахождения приемлемых оценок $\hat{P}_j$, т. е. оценок математического ожидания, а также оценок математического ожидания условного ущерба $\hat{m}_{r,N,j}$. Теперь необходимо найти оценку произведения этих случайных независимых величин. Независимость оценок следует из независимости самих случайных величин, а значит, и соответствующих выборок. Оценка $\hat{P}_j$ может иметь гипергеометрическое, биномиальное или пуассоновское распределения, в зависимости от выбранного статистического плана. Оценка $\hat{m}_{r,N,j}$ имеет такое же распределение, как сама случайная величина условного ущерба R_j.

Для определения оценки математического ожидания произведения оценок математических ожиданий, строго говоря, нужно было бы найти композицию законов распределения оценок $\hat{P}_j$ и $\hat{m}_{r,N,j}$ и для него уже искать несмещенную оценку $\hat{m}_{cj}$ математического ожидания $\mathrm{M}[C_j]$, а также соответствующие доверительные интервалы.

На практике из-за малого количества аварий непосредственно оценки $\hat{m}_{r,N,j}$, используя выборочное среднее, найти не удается, что будет показано в примере. Поэтому в качестве оценки безусловного ущерба от аварии j-го типа можно принимать произведение расчетного (значит, неслучайного) значения математического ожидания условного ущерба $\mathrm{M}[R_j]$ на оценку $\hat{P}_j$:

$$\hat{m}_{cj} = \mathrm{M}[R_j]\ \hat{P}_j\ .$$

Доверительные интервалы оценки $\hat{m}_{cj}$ будут определяться интервалами для $\hat{P}_j$, домноженными на постоянное число $\mathrm{M}[R_j]$.

Для расчета оценки математического ожидания суммарного ущерба от всех k типов аварий с учетом (1) можно использовать выражение

$$\hat{m}_c = \sum_{j=1}^{k}\ \mathrm{M}[R_j]\ \hat{P}_j\ , \tag{22}$$

которое является линейной функцией зависимых случайных оценок $\hat{P}_j$ (один тип аварий может перерастать в другой) и неслучайных (расчетных) значений $\mathrm{M}[R_j]$.

Для построения доверительных интервалов оценки $\hat{m}_c$ необходимо найти ее закон распределения по законам распределения оценок $\hat{P}_j$ с учетом их зависимости (корреляции).

Если учесть, что при $n_j \geq 25$ рассмотренные законы оценок $\hat{P}_j$ обычно сходятся к нормальному, то, определив дисперсию $\sigma^2[\hat{m}_c]$ оценки $\hat{m}_c$, можно построить доверительный интервал по аналогии с (5).

Дисперсия оценки $\hat{m}_c$ с учетом (22) определяется следующим выражением:

$$\sigma^2[\hat{m}_c] = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{M}^2[R_j]\sigma^2[\hat{P}_j] + 2\sum_{j<i} \mathrm{M}[R_j]\mathrm{M}[R_i]K_{ji},$$

где K_{ji} – корреляционные моменты оценок $\hat{P}_j$.

Дисперсии оценок $\hat{P}_j$ можно определить по следующим формулам [2].

Для плана (n, R, T)

$$\sigma[\hat{P}_j] = \hat{P}_j \sqrt{-\ln \hat{P}_j / n_j},$$

где n_j – объем выборки.

Для плана (n, U, T) имеем

$$\sigma[\hat{P}_j] = \frac{-\ln \hat{P}_j}{\sqrt{\hat{m}_j}}.$$

При плане (n, $\hat{m}$) и бесконечной генеральной совокупности

$$\sigma[\hat{P}_j] = \sqrt{\frac{\hat{P}_j(1-\hat{P}_j)}{n_j - 1}},$$

где n_j – объем выборки.

Для плана (n, $\hat{m}$) и конечной генеральной совокупности N_j при выборке n_j

$$\sigma[\hat{P}_j] = \sqrt{\left(\frac{1}{n_j} - \frac{1}{N_j}\right) n_j \frac{\hat{P}_j(1-\hat{P}_j)}{n_j - 1}}.$$

Пример расчета ущерба от аварий в совокупности ТС

Вводится в эксплуатацию совокупность ТС. Развитие совокупности до 300 ТС проведено за три года: в первый год эксплуатировали 40, во второй – 140, в третий – 300 ТС. В результате решения задач оптимизации при проектировании и отработке установлены три типа возможных аварий (j =1, 2, 3), найдены оптимальные значения вероятностей аварий P_{j0} и математических ожиданий условных ущербов $(\mathrm{M}[R_j])_0$ в расчете на одну ТС. Функция потерь от неточного определения истинного значения по оценке с решающим правилом (см. выражение (15))

$$\theta_\mathrm{p} = \hat{\theta} + \Delta\theta_\mathrm{p}$$

принята линейной с коэффициентом $\overline{A}$, определяющим, во сколько раз потери от занижения ущерба больше, чем от завышения.

Расчетные данные представлены в табл. 1.

Необходимо оценить динамику изменения характеристик совокупности ТС, определить прогнозируемый ущерб на последующие годы эксплуатации.

Таблица 1

j	1	2	3
$(\mathrm{M}[R_j])_0$, усл.ед.	1	10	100
P_{j0}	0,0200	0,0030	0,0005
$\overline{A}$	4	9	19

В первые три года эксплуатации получены следующие статистические данные, характеризующие вероятности возникновения аварий (табл. 2).

Таблица 2

t, годы	n	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$
1	40	2	1	0
2	140	3	1	0
3	300	6	1	0

В табл. 2 $\hat{m}_1$, $\hat{m}_2$, $\hat{m}_3$ – количества аварий 1, 2, 3-го типов, произошедших при эксплуатации n ТС в год.

После аварии соответствующая ТС восстанавливалась за срок не более двух суток и продолжала работать в совокупности.

Величины наблюденных значений ущерба представлены в табл. 3.

Таблица 3

		1-й год	2-й год	3-й год
r_i, усл. ед	j =1	0,8;1,2	1,3;0,7;0,9	1,0;1,2;1,3; 1,1;0,6;0,8
	j = 2	8	12	13
	j = 3	0	0	0

Начнем решение задачи с оценок изменения вероятностей P_j. Каждую из трех вероятностей (j = 1, 2, 3) будем оценивать в трех точках, соответствующих серединам интервалов продолжительностью в один год (точки a, b, c на рис. 5). С учетом малого времени замены аварийных ТС (до двух суток по сравнению с 365 сутками в году) и, принимая экспоненциальный закон (9) изменения P_j в течение года, можем для статистических оценок $\hat{P}_j$ применить план (n, R, T). Тогда образуются три выборки для расчета каждой оценки $\hat{P}_j$: с n = 40 (первый год), n = 140 (второй год), $n = N$ = 300 (третий год) соответственно в точках a, b, c (рис. 5).

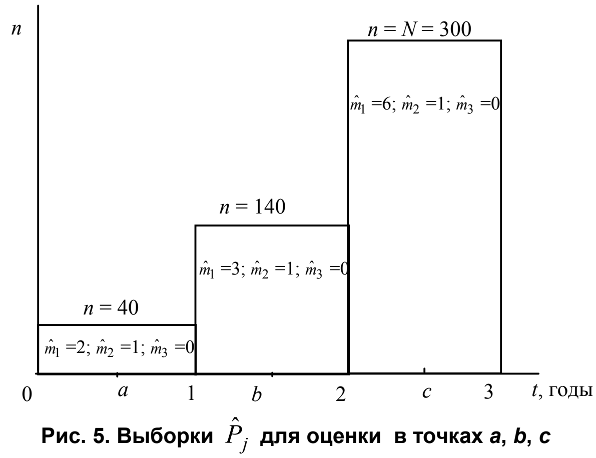

Рис. 5. Выборки $\hat{P}_j$ для оценки в точках *a*, *b*, *c*

Для j = 1, принимая в первом приближении распределение оценки близким к нормальному, по (20) и (21) найдем оптимальные доверительные вероятности с учетом того, что $\overline{A}$ = 4:

$$\gamma_{1р} = \frac{4}{1+4} = 0{,}8;\ \gamma_р = 2 \cdot 0{,}8 - 1 = 0{,}6.$$

Рассчитывая по формулам (10)–(12), получим данные, приведенные в табл. 4 для j = 1.

В табл. 4 $a_\alpha(k)$ соответствующие квантили распределения Пуассона, $\hat{P}_{вр}$ – значение, которое должно рассматриваться как истинная неизвестная величина P (односторонний верхний доверительный предел при оптимальной доверительной вероятности $\gamma_{1р}$).

Аналогичные расчеты для j = 2 при $\overline{A}$ = 9 (табл. 1) и $\gamma_{1р} = \frac{9}{1+9} = 0{,}9$; $\gamma_р = 2 \cdot 0{,}9 - 1 = 0{,}8$, сведены в табл. 5.

Наконец, для j = 3 расчеты представлены в табл. 6 ($\overline{A}$ = 19, $\gamma_{1р}$ = 0,95; $\gamma_р$ = 0,9).

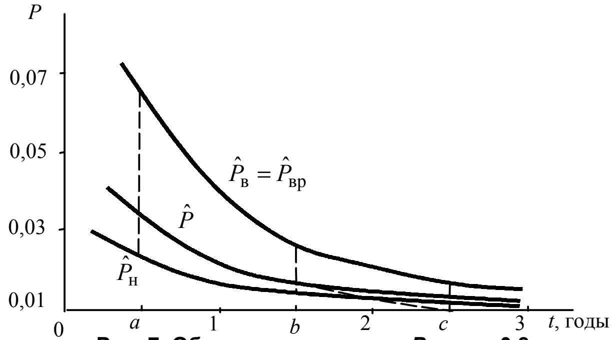

Рис. 7. Область доверия для P_2 и $\gamma_р$ = 0,8

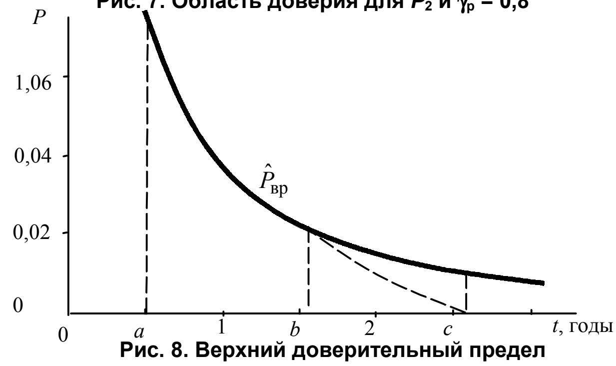

Рис. 8. Верхний доверительный предел для P_3 с $\gamma_р$ = 0,9

Таблица 4

t, год	n	$\hat{m}$	$\hat{P}$	$a_{0,8}(\hat{m})$	$a_{0,2}(\hat{m}-1)$	$\hat{P}_н$	$\hat{P}_в$	$\hat{P}_{вр}$
1	40	2	0,0500	1,535	2,994	0,0376	0,0721	0,0721
2	140	3	0,0214	2,297	4,279	0,0163	0,0301	0,0301
3	300	6	0,0200	4,734	7,906	0,0157	0,0260	0,0260

Таблица 5

t, год	n	$\hat{m}$	$\hat{P}$	$a_{0,9}(\hat{m})$	$a_{0,1}(\hat{m}-1)$	$\hat{P}_н$	$\hat{P}_в$	$\hat{P}_{вр}$
1	40	1	0,0250	0,532	2,303	0,0132	0,0559	0,0559
2	140	1	0,0071	0,532	2,303	0,0038	0,0163	0,0163
3	300	1	0,0033	0,532	2,303	0,0018	0,0076	0,076

Таблица 6

t, год	n	$\hat{m}$	$\hat{P}$	$a_{0,05}(0)$	$\hat{P}_н$	$\hat{P}_{вр}$
1	40	0	0	2,996	0	0,0722
2	140	0	0	2,996	0	0,0212
3	300	0	0	2,996	0	0,0099

Результаты расчетов представлены на рис. 6–8. Видно, что с годами вероятности аварий (оценки $\hat{P}_j$) значительно уменьшаются, а доверительные границы сжимаются около оценок из-за увеличения выборок.

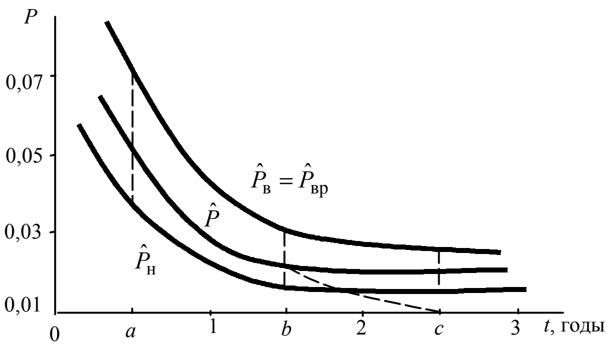

Рис. 6. Область доверия для P_1 и $\gamma_р$ = 0,6

Рассмотрим еще один важный аспект оценок $\hat{P}_j$, $\hat{P}_{врj}$. Создаваемая совокупность ТС включает 300 элементов. Значит, данные третьего года нельзя рассматривать как выборочные, была испытана вся генеральная совокупность (N = 300). Поэтому величины $\hat{P}$ = 0,0200; $\hat{P}$ = = 0,0033; $\hat{P}$ = 0 (табл. 4, 5, 6) являются не оценками, а истинными значениями для генеральной совокупности в третьем году эксплуатации, т. е. $\hat{P} = \hat{P}_{вр} = P$; P_1 = 0,0200; P_2 = 0,0033; P_3 = 0, что отмечено на рис. 6–8 пунктирными линиями.

Как себя поведет дальше генеральная совокупность, можно будет определять в каждый последующий год эксплуатации.

Далее оценим величины верхних доверительных пределов в точках a и b (рис. 6–8), не используя план (n, R, T), а рассматривая выборки n= 40 и 140 из генеральной совокупности N = 300. Строго говоря, в этом случае нужно использовать гипергеометрическое распределение, но при таких больших n и N оно почти точно заменяется подобранным выражением с пуассоновским распределением (13).

Для j = 1 в точке a (n = 40) при $\gamma_{1р}$ = 0,8 получим

$$\hat{P}_{вр} = 1 - \frac{2 \cdot 40 - 2 - 2{,}994}{2 \cdot 40 - 2 + 2{,}994} = 0{,}0739.$$

Для плана (n, R, T) получено значение $\hat{P}_{вр}$ = = 0,0721 (табл. 4).

В точке b (n = 140) аналогично получим

$$\hat{P}_{вр} = 1 - \frac{2 \cdot 140 - 3 - 4{,}279}{2 \cdot 140 - 3 + 4{,}279} = 0{,}0304,$$

а при плане (n, R, T) имели $\hat{P}_{вр}$ = 0,0301 (табл. 4).

Для j =2 в точке a (n = 40) при $\gamma_{1р}$ = 0,9 получим

$$\hat{P}_{вр} = 1 - \frac{2\cdot 40 - 1 - 2{,}303}{2\cdot 40 - 1 + 2{,}303} = 0{,}0566,$$

а для плана (n, R, T) имели $\hat{P}_{вр} = 0{,}0559$.

В точке b (n = 140) имеем

$$\hat{P}_{вр} = 1 - \frac{2\cdot 140 - 1 - 2{,}303}{2\cdot 140 - 1 + 2{,}303} = 0{,}0164,$$

для плана (n, R, T) получили $\hat{P}_{вр} = 0{,}0163$.

Некоторое уменьшение $\hat{P}_{вр}$ при плане (n, R, T) определяется его большей информативностью: учитывается его экспоненциальный закон (10).

Для j = 3 в точках a и b применение выражения (14) для расчета верхнего доверительного предела $\hat{P}_{вр}$ дает полное совпадение с результатами расчета по плану (n, R, T).

Для точки a имеем $\gamma_{1р} = 0{,}95$,

$$\hat{P}_{вр} = 1 - (1 - 0{,}95)^{1/40} = 0{,}0722;$$

для точки b соответственно

$$\hat{P}_{вр} = 1 - (1 - 0{,}95)^{1/140} = 0{,}0212.$$

Перейдем к оценке условного ущерба. Для аварии первого типа (j = 1) генеральная совокупность случаев аварий, при которых можно оценивать ущерб, может состоять из следующего числа:

$$N_a(n = 40) = n_a\ \hat{P}_{вр} = 40\cdot 0{,}0721 \approx 2{,}9 \approx 3;$$

$$N_b(n = 140) = n_b\ \hat{P}_{вр} = 140\cdot 0{,}0301 \approx 4{,}2 \approx 4.$$

Следовательно, из максимально возможных трех значений r_1, r_2, r_3 ущерба в первый год (точка a) выпало два значения, для которых оценка математического ожидания

$$\hat{m}_{r,N} = \frac{1}{2}(0{,}8 + 1{,}2) = 1 \text{ усл. ед.}$$

В точке b (второй год эксплуатации) из возможных 4 случаев наблюдали три. Оценка математического ожидания ущерба

$$\hat{m}_{r,N} = \frac{1}{3}(1{,}3 + 0{,}7 + 0{,}9) \approx 0{,}967 \text{ усл. ед.}$$

Наконец, в третий год (точка c) получено неслучайное значение математического ожидания для генеральной совокупности в 300 ТС.

$$\hat{m}_{r,N} = \frac{1}{6}(1{,}0 + 1{,}2 + 1{,}3 + 1{,}1 + 0{,}6 + 0{,}8) = 1{,}0 \text{ усл. ед.}$$

В соответствии с (3) и (4) дисперсия оценки $\hat{m}_{r,N}$ для первого года составит

$$\sigma^2[\hat{m}_{r,N}] = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2-1}[(0{,}8 - 1{,}0)^2 + (1{,}2 - 1{,}0)^2] \approx 0{,}0134 \text{ (усл. ед.)}^2; \ \sigma[\hat{m}_{r,N}] \approx 0{,}116 \text{ усл. ед.}$$

Аналогично для второго года

$$\sigma^2[\hat{m}_{r,N}] = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{3-1}[(1{,}3 - 0{,}967)^2 + (0{,}7 - 0{,}967)^2 + (0{,}9 - 0{,}967)^2] = 0{,}0308 \text{ (усл. ед.)}^2;$$
$$\sigma[\hat{m}_{r,N}] \approx 0{,}175 \text{ усл. ед.}$$

Наконец, для третьего года, поскольку имеем неслучайное значение $m_{r,N}$, соответствующая дисперсия равна 0. Если рассмотреть три полученных значения с весами $1/\sigma[\hat{m}_{r,N}]$, то наблюденное значение будет соответствовать истинному значению условного ущерба в третий год.

Для второго типа аварии в точках a и b получим дисперсии оценок математических ожиданий ущерба равные ∞, т. к. $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{1-1}$. Следовательно, за величину ущерба нужно принять полученное для точки c значение $m_{r,N}$ = 1 усл. ед., а для j = 3 соответственно $m_{r,N}$ = 0 усл.ед.

Тогда в соответствии с (1) суммарный ущерб для генеральной совокупности в 300 ТС от аварий трех типов в один год составит:

$$61 + 1\cdot 10 + 0\cdot 100 = 16 \text{ усл.ед.}$$

Если генеральная совокупность вышла на устойчивый режим, то в последующие годы в расходы на ее эксплуатацию нужно добавлять порядка 16 усл. ед. на ликвидацию последствий аварий.

Расчетное значение суммарного ущерба в соответствии с исходными данными (табл. 1) составляло для всей совокупности в 300 ТС:

$$300\,(0{,}0200\cdot 1 + 0{,}0030\cdot 10 + 0{,}0005\cdot 100) = 30 \text{ усл. ед.}$$

Разница расчетных и опытных данных сложилась из-за нереализованности малой вероятности (P_3 = 0,0005) весьма опасной аварии с ущербом в 100 усл. ед.

О принятии совокупности ТС в эксплуатацию

Для любых изделий существует период приработки с повышенной вероятностью неисправностей, отказов, а, значит, и аварий. В нашем примере он длился всего три года, что весьма оптимистично для больших систем сложных изделий. При массовом производстве обычно период приработки перекладывается на плечи покупателя, которому дается возможность гарантийного ремонта. Кстати, его стоимость включают в цену изделия.

При создании уникальных больших систем возникает проблема принятия в эксплуатацию всей системы по результатам весьма ограниченных и не полностью натурных испытаний первой партии. Действительно, заказчику представляется небольшое количество элементов будущей совокупности, которые изготовлены не по серийной технологии, а специально готовятся к испытаниям, обслуживаются в ходе испытаний хорошо подготовленным персоналом, элементы не имеют еще наработки. По этим демонстрационным испытаниям, режимы которых не совпадают с эксплуатационными, нужно спрогнозировать характеристики будущей совокупности, а, главное, решить, выполнены ли условия заказчика, его требования к создаваемой системе.

В этих условиях решающей информацией должны быть результаты испытаний элементов ТС, в том числе ресурсные, утяжеленные и ряд других. Этот этап отработки должен снять все внеплановые, нерасчетные неисправности, отказы, аварии отдельной ТС. Однако даже при глубокой отработке отдельного изделия, при формировании совокупности системы обязательно возникнут системные причины отказов, аварий, для устранения которых потребуются доработки.

Таким образом, даже при идеальной отработке каждого элемента будущей системы в ходе ее развития вероятности аварий будут меняться. Поэтому имеет смысл задавать требования к характеристикам отдельного элемента, режимам его испытаний, а также к характеристикам системы, причем с указанием сроков окончания периода системной приработки.

Проблема задания требований к отдельному элементу, системе в целом, планируемое изменение характеристик системы в ходе ее развития, а также процедура принятия ее заказчиком, еще ждут своего решения.

Литература

1. **Уилкс С.** Математическая статистика. – М.: Наука, 1967.

2. **Волков Л.И.** Управление эксплуатацией летательных комплексов. 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1987.

Российская Академия наук
Статья поступила 12.11.2000

УДК 629.7.01+629.7.07

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ РАКЕТНОГО КОМПЛЕКСА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛЕННОСТИ ОБСЛУЖИВАЮЩЕГО ЛИЧНОГО СОСТАВА

© 2001, Л.И. Волков

Предложена модель, связывающая показатели надежности РК с численностью и обученностью обслуживающего персонала, глубиной контроля технологических процессов эксплуатации. Приведены расчеты, показывающие границы опасного падения надежности при сокращении личного состава.

Расчетные зависимости

Введем характеристику

$$k = \frac{N_{шт}}{N}, \qquad (1)$$

где $N_{шт}$ – штатная численность личного состава (ЛС); N – реально существующая численность ЛС.

Исследуем зависимость надежности (безотказности) одной пусковой установки (ПУ) в течение срока T – $P(k, T, r)$, где r – количество степеней контроля выполняемых личным составом технологических операций на ПУ. Будем полагать, что при $k = 1{,}00$ и $k = 1{,}58$ (существующая сейчас численность) обеспечивается четыре уровня контроля ($r = 4$). При $k = 2{,}00$ – $r = 3$, при $k = 3{,}00$ – $r = 2$.

Таким образом, можно считать, что безотказность для заданного интервала $(0, T)$ зависит только от k, т. е. $P(k)$.

Вероятность безотказной работы 1 ПУ на интервале времени $(0, T)$ определяется выражением

$$P(k) = P_1(k)\cdot P_2\cdot P_3(k), \qquad (2)$$

где $P_1(k)$ – вероятность отсутствия отказа из-за действия внешней среды (нападение, гроза, землетрясение и т. п.); P_2 – вероятность отсутствия отказов из-за неисправности техники; $P_3(k)$ – вероятность отсутствия отказа из-за ошибок ЛС (номеров расчетов и контролирующих).

Вероятность P_2 для выбранного интервала $(0, T)$ в исследовании принимается средним значением. Более строго эту величину можно определить с учетом срока боевого дежурства, проводимых дистанционных периодических проверок (ДПП) и регламентов, при которых вскрываются и устраняются отказы. Подробнее см. [1].

Вероятность $P_1(k)$ зависит от коэффициента численности, т. к. при малой численности N труднее организовать необходимую охрану и оборону ПУ, восстановление готовности.

Лев Иванович Волков – член-кореспондент РАН, доктор технических наук, генерал-лейтенант в отставке

Будем полагать, что существует зависимость

$$P_1(k) = P_{10}\cdot\exp(-ak), \ (k \ge 1), \qquad (3)$$

где P_{10} и a – расчетные (опытные) коэффициенты (рис. 1).

Исследуем зависимость $P_3(k)$. Ошибки личного состава, влияющие на безотказность ПУ, могут возникать только в ходе выполнения работ на вооружении.

Укрупненно рассмотрим 4 технологических процесса:

- постановка на боевое дежурство;
- устранение неисправностей, выявленных при постоянном контроле за состоянием ПУ и в ходе ДПП;
- проведение регламента на ПУ;
- снятие комплекса с боевого дежурства.

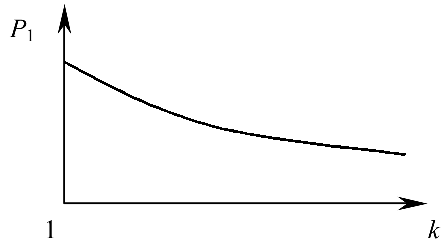

Рис. 1. Вид функции $P_1(k) = P_{10}\cdot e^{-ak}$, ($k \ge 1$)

При малом количестве ЛС надежность выполнения этих технологических процессов уменьшается, т. к. номера расчетов работают менее внимательно, сил для контроля меньше, сказывается усталость операторов и контролеров.

Вероятность $P_3(k)$ можно представить в виде

$$P_3(k) = P_{31}(k)\,[P_{32}(k)]^{m_2}\,[P_{33}(k)]^{m_3}\,P_{34}(k), \ (k \ge 1), \qquad (4)$$

где $P_{31}(k)$ – вероятность отсутствия отказов по вине ЛС при постановке РК на боевое дежурство; $P_{32}(k)$ – вероятность отсутствия отказов по вине ЛС при устранении одной типовой неисправности на ПУ, обнаруженной постоянным контролем или в ходе дистанционных периодических проверок; m_2 – суммарное